全品

教辅图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年创始人专注教育行业

全品学练考

AI智慧教辅

主编 肖德好

导学案

高中数学

必修第二册 RJA

天津出版传媒集团

天津人民出版社

CONTENTS 目录 导学案

06 第六章　平面向量及其应用

PART SIX

07 第七章　复数

PART SEVEN

08 第八章　立体几何初步

PART EIGHT

09 第九章　统计

PART NINE

10 第十章　概率

PART TEN

第六章　平面向量及其应用

6.1　平面向量的概念

6.1.1　向量的实际背景与概念

6.1.2　向量的几何表示

6.1.3　相等向量与共线向量

【学习目标】

1. 通过对力、速度、位移等的分析，了解平面向量的实际背景，理解平面向量、零向量、向量的模、单位向量、平行向量(共线向量)的意义和两个向量相等的含义.

2. 能够在熟悉的实际问题情境中，理解平面向量的几何表示和基本要素.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ **知识点一　向量的概念**

1. 向量：既有________又有________的量叫作向量.

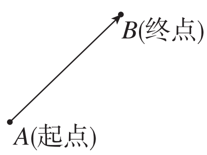
2. 数量：只有________没有________的量称为数量.

◆ **知识点二　向量的几何表示**

1. 有向线段

(1)有向线段：具有________的线段叫作有向线段.

(2)表示方法：以 A 为起点，B 为终点的有向线段记作 $\overrightarrow{AB}$，如图.



(3)有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度：线段 AB 的长度也叫作有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度，记作 $|\overrightarrow{AB}|$.

(4)有向线段包含三个要素：________________.

2. 向量的表示方法

(1)向量的几何表示：向量可以用有向线段来表示，有向线段的________表示向量的大小，有向线段的________表示向量的方向. 如 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$.

(2)向量的字母表示：向量可以用黑体小写字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…表示，书写时，用带箭头的小写字母 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，…表示.

3. 向量的相关概念

(1)向量的模：向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的________(或称模)，记作________.

(2)零向量：长度为________的向量叫作零向量，记作________.

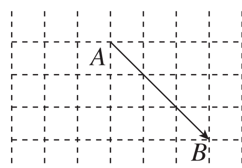
(3)单位向量：长度等于____________的向量叫作单位向量.

【诊断分析】1. 判断下列说法的正误.(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)有向线段可以表示向量.　(　　)

(2)在同一平面内，把所有长度为 1 的向量的起点固定在同一点，这些向量的终点形成的轨迹是半径为 1 的圆.　(　　)

2. 在如图的方格纸上，每个小正方形的边长为 1，则 $|\overrightarrow{AB}|=$________.



3. 0 与 $\mathbf{0}$ 有什么区别和联系？

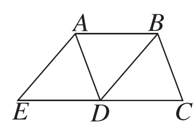
◆ **知识点三　相等向量与共线向量**

1. 平行向量：方向____________的________叫作平行向量. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作________. 规定：零向量与任意向量平行.

2. 相等向量：长度________且方向________的向量叫作相等向量. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

3. 共线向量：任一组________都可以平移到同一条直线上，因此，平行向量也叫作________.

【诊断分析】如图所示，已知四边形 $ABCD$ 与四边形 $ABDE$ 都是平行四边形.



(1)图中与向量 $\overrightarrow{AB}$ 共线的向量有________________；

(2)图中与向量 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有______________.

课中探究

◆ 探究点一　向量的基本概念

例 1 (1)[2025·天津宝坻区九中高一月考] 下列说法中正确的是　(　　)

A. 向量的模都是正实数

B. 单位向量只有一个

C. 向量的大小与方向无关

D. 方向不同的向量不能比较大小,但同向的向量可以比较大小

(2)给出下列物理量:①质量;②速度;③位移;④力;⑤加速度;⑥路程;⑦密度.其中是向量的有____________.(填序号)

变式 (多选题)下列说法正确的是　(　　)

A. 向量 $\overrightarrow{CD}$ 与向量 $\overrightarrow{DC}$ 长度相等

B. 起点相同的单位向量,终点必相同

C. 向量的模可以比较大小

D. 任一非零向量都可以平行移动

[素养小结]

解决与向量概念有关问题的方法

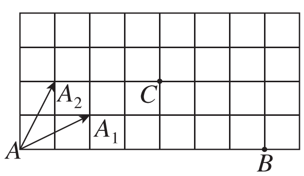
解决与向量概念有关问题的关键是突出向量的核心——方向和长度,如:单位向量的核心是方向没有限制,但长度都是一个单位长度;零向量的核心是方向没有限制,长度是0;规定零向量与任意向量共线.只有紧紧抓住概念的核心才能顺利解决与向量概念有关的问题.

◆ 探究点二　向量的几何表示

例 2 如图是中国象棋的半个棋盘示意图,"马走日"是象棋中"马"的走法,"马"可从 A 跳到 A_1,也可从 A 跳到 A_2,用向量 $\overrightarrow{AA_1}$,$\overrightarrow{AA_2}$ 表示"马"走了"一步",试在图中画出:

(1)"马"从 A 处走到 B 处的一种情况;

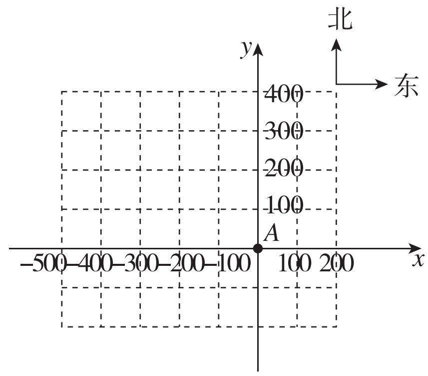
(2)"马"在 C 处走了"一步"的所有情况.



变式 [2025·滨州高一期中] 如图,某人从点 A 出发,向西走了 200 m 后到达点 B,然后沿北偏西一定角度的某方向行走了 $100\sqrt{13}$ m 后到达点 C,最后向东走了 200 m 后到达点 D,发现点 D 在点 B 的正北方向.

(1)作出 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{DA}$;

(2)求 $\overrightarrow{DA}$ 的模.



[素养小结]

在画图时,向量是用有向线段来表示的,用有向线段的长度表示向量的大小,用箭头所指的方向表示向量的方向.应该注意的是有向线段是向量的表示,并不是说向量就是有向线段.

◆ 探究点三　相等向量与共线向量

例 3 下列说法正确的是　(　　)

A. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{BA}$ 的长度相等

B. 两个有共同起点且长度相等的向量,它们的终点相同

C. 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$

D. 若两个单位向量平行,则这两个单位向量相等

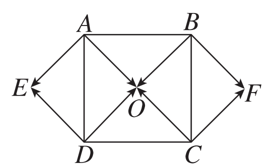
例 4 如图所示,点 O 为正方形 $ABCD$ 对角线的交点,四边形 $OAED$,$OCFB$ 都是正方形.在图中所示的向量中:

(1)分别写出与 $\overrightarrow{AO}$,$\overrightarrow{BO}$ 相等的向量.

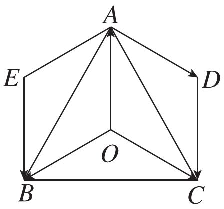
(2)写出与 $\overrightarrow{AO}$ 共线的向量.

(3)写出与 $\overrightarrow{AO}$ 的模相等的向量.

(4)向量 $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{CO}$ 是否相等?



变式 如图所示，O 是正三角形 ABC 的中心，四边形 $AOCD$ 和四边形 $AOBE$ 均为平行四边形.



(1)与向量 $\overrightarrow{AD}$ 相等的向量有________；

(2)与向量 $\overrightarrow{OA}$ 相反的向量有________；

(3)与向量 $\overrightarrow{OA}$ 的模相等的向量有____________.（填图中所画出的向量）

[素养小结]

判断一组向量是否相等，关键是看这组向量是否方向相同，长度相等，与起点和终点的位置无关. 判断一组向量是否共线，只需判断它们是否同向或反向.

6.2 平面向量的运算

6.2.1 向量的加法运算

【目标认知】

1. 借助实例和平面向量的几何表示，掌握平面向量加法运算及运算规则，并理解其几何意义，会用向量加法的三角形法则和平行四边形法则作出两个向量的和.

2. 能够在数学问题情境中，掌握向量加法的交换律与结合律，并会用它们进行向量运算.

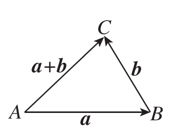
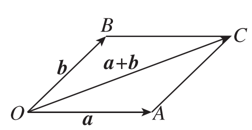
课前预习 知识导学 素养初识

◆ 知识点一 向量加法的定义及运算法则

1. 向量加法的定义

求____________的运算，叫作向量的加法.

2. 向量加法的运算法则

	三角形法则	平行四边形法则
前提	已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$	已知不共线的两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$
作法	在平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AC}=$________	作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以 OA，OB 为邻边作 ▱$OACB$，连接 OC，则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$
结论	向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$	对角线 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和
图形		
特例	对于零向量与任意向量 $\boldsymbol{a}$，我们规定________=________=________	

（续表）

	三角形法则	平行四边形法则
三角不等式	$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|\leqslant\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$，当且仅当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量或 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是方向相同的非零向量时，等号成立	

【诊断分析】1. 判断下列说法的正误.（正确的打"√"，错误的打"×"）

(1)两个向量相加的结果可能是一个数量. （ ）

(2)两个向量相加实际上就是两个向量的模相加. （ ）

(3)任意两个向量的和向量不可能与这两个向量共线. （ ）

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 表示"向东航行 1 km"，向量 $\boldsymbol{b}$ 表示"向南航行 1 km"，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示什么？

◆ 知识点二 向量加法的运算律

运算律	交换律	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$________
	结合律	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=$________

【诊断分析】判断下列说法的正误.（正确的打"√"，错误的打"×"）

(1)$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$. （ ）

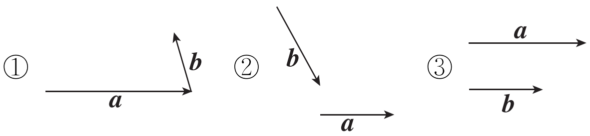
(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})$. （ ）

(3)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{0}$. （ ）

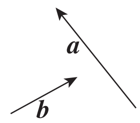
(4)$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BD}$. （ ）

◆ 探究点一　向量加法的三角形法则与平行四边形法则

例 1 (1)如图,已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,用向量加法的三角形法则作出①②③中的向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.(不写作法,画出图形即可)



(2)已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$(如图),请用向量加法的平行四边形法则作出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.(不写作法,画出图形即可)



变式 如图所示,O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心,化简下列各式:

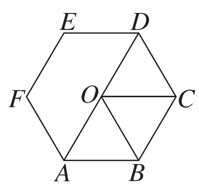
(1)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=$________;

(2)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=$________;

(3)$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OD}=$________;

(4)$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{FE}=$________;

(5)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FE}=$________.



[素养小结]

(1)在使用向量加法的三角形法则时,要注意"首尾相接",即若第一个向量的终点与第二个向量的起点重合,则以第一个向量的起点为起点,并以第二个向量的终点为终点的向量为两向量的和.

(2)向量加法的平行四边形法则的应用前提是"共起点",即两个向量是从同一点出发的不共线向量.

拓展 [教材 P10 练习 T2 改编] 当非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足什么条件时,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$?

◆ 探究点二　向量的加法运算及运算律

例 2 [教材 P22 习题 6.2T4 节选] 化简:

(1)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$;

(2)$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB})+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}$;

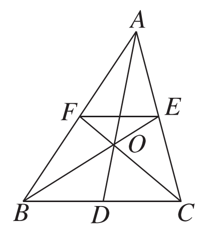
(3)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}$.

变式 如图,在$\triangle ABC$ 中,D,E,F 分别是 BC,AC,AB 的中点,O 为 AD,BE,CF 的交点,化简下列各式:

(1)$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}$;

(2)$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA}$;

(3)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DC}$.



[素养小结]

解决向量的加法运算问题时应注意两点:

(1)可以利用向量的几何表示,画出图形进行化简或计算.

(2)要灵活应用向量加法的运算律,注意各向量的起、终点及向量起、终点字母的排列顺序,特别注意勿将 $\boldsymbol{0}$ 写成 0.

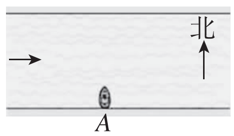
拓展 已知点 O 为$\triangle ABC$ 外接圆的圆心,且 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}=\boldsymbol{0}$,则$\triangle ABC$ 的内角 A 等于________.

◆ **探究点三　向量加法的实际应用**

例 3 [教材 P9 例 2] 长江两岸之间没有大桥的地方,常常通过轮渡进行运输.如图,一艘船从长江南岸 A 地出发,垂直于对岸航行,航行速度的大小为 15 km/h,同时江水的速度为向东 6 km/h.

(1)用向量表示江水速度、船速以及船实际航行的速度;

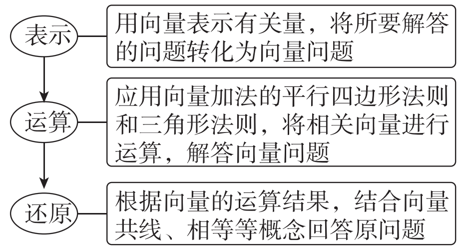
(2)求船实际航行的速度的大小(结果保留小数点后一位)与方向(用与江水速度间的夹角表示,精确到 1°).



变式 甲、乙、丙、丁四个机器人按下列路线组织传球:甲机器人按北偏东 30°的方向将球传 2 m 给机器人乙,然后机器人乙按南偏东 30°的方向将球传 2 m 给机器人丙,机器人丙再按西南方向将球传$\sqrt{2}$ m 给机器人丁,利用向量加法求出球的位移向量,并确定此向量模的大小.

[素养小结]

应用向量解决实际问题的基本步骤



6.2.2　向量的减法运算

【学习目标】

1. 借助实例和平面向量的几何表示,掌握平面向量减法运算及运算规则,并理解其几何意义.
2. 会作出两个向量的差.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ **知识点一　相反向量**

定义	与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度________,方向________的向量,叫作 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量,记作 $-\boldsymbol{a}$
性质	$-(-\boldsymbol{a})=$________
	零向量的相反向量仍是零向量
	$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=$________
	如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互为相反向量,那么 $\boldsymbol{a}=$________,$\boldsymbol{b}=$________,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=$________

【诊断分析】判断下列说法的正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)相反向量就是方向相反的向量.　(　　)

(2)向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为相反向量.　(　　)

(3)$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$,$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.　(　　)

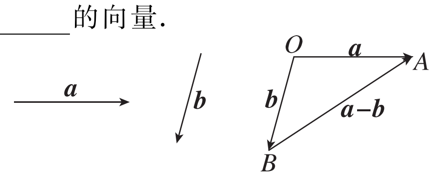
◆ **知识点二　向量减法及其几何意义**

1. 向量减法的定义

向量 $\boldsymbol{a}$ 加上 $\boldsymbol{b}$ 的________,叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差,即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$________.求两个向量差的运算叫作向量的________.

2. 向量减法的几何意义

如图所示,已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,在平面内任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=$________$=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可以表示为从________指向________的向量.



3. $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$与$|\boldsymbol{a}|$,$|\boldsymbol{b}|$之间的关系

(1)对于任意向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,都有________$\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant$________;

(2)当$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$共线且同向时,有$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________或________;

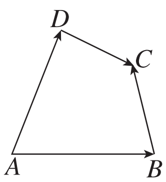
(3)当$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$共线且反向时,有$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________.

【诊断分析】 1. 判断下列说法的正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)两个向量的差仍是一个向量. ( )

(2)向量$\boldsymbol{a}$和向量$\boldsymbol{b}$的差与向量$\boldsymbol{b}$和向量$\boldsymbol{a}$的差互为相反向量. ( )

2. 如图所示,在四边形$ABCD$中,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$,则向量$\overrightarrow{DC}$可用$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$表示为________.

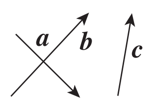


课中探究

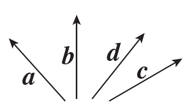
考点探究 素养小结

◆ 探究点一　向量的减法及其几何意义

例 1 如图,已知向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$不共线,求作向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.



变式 [教材P12例3改编] 如图所示,已知向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{d}$,求作向量$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$.



[素养小结]

求作两个向量的差向量的两种思路

(1)可以转化为向量的加法来进行,如$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,可以先作$\boldsymbol{a}$,$-\boldsymbol{b}$,然后作$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$即可.

(2)也可以直接用向量减法的几何意义,即使两向量的起点重合,则差向量为连接两个向量的终点,指向被减向量的终点的向量.

◆ 探究点二　向量加减法的基本运算

例 2 (1)[2025·泰安高一期中] 下列向量的运算结果不正确的是 ( )

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$

C. $\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{BC}$

D. $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{0}$

(2)化简:

①$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$;

②$(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{OB})$.

变式 化简:(1)$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NQ}-\overrightarrow{PQ}=$________;

(2)$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=$________;

(3)$\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=$________.

[素养小结]

(1)向量减法运算的常用方法

常用方法
- 可以通过相反向量，把向量的减法运算转化为加法运算
- 运用三角形法则，此时要注意两个向量要有共同的起点
- 引入点O，运用三角形法则，将各向量的起点统一

(2)向量加减法化简的两种形式

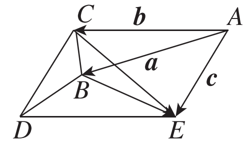
①首尾相连且为和;

②起点相同且为差.

做题时要注意观察是否有这两种形式,同时要注意逆向应用.

◆ 探究点三　向量减法及其几何意义的应用

例 3 如图所示,四边形$ACDE$是平行四边形,B是该平行四边形内一点,且$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{c}$,试用向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$表示$\overrightarrow{BE}$与$\overrightarrow{CE}$.



变式 (1)已知平面内的四边形 $ABCD$ 和点 O,设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$,若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$,试判断四边形 $ABCD$ 的形状.

(2)[教材P23习题6.2T7节选] 已知 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量,当向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 成什么位置关系时,满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$?

[素养小结]

向量减法的几何意义:两向量相减,表示两向量起点的字母必须相同,这样两向量的差向量以减向量的终点字母为起点字母,以被减向量的终点字母为终点字母.此类问题要根据图形的几何性质,运用向量的平行四边形法则和三角形法则解题,若题目中遇到共起点的向量,则常常创造条件作差,要特别注意向量的方向.

6.2.3 向量的数乘运算

【学习目标】

1. 通过实例分析,掌握平面向量数乘运算及运算规则,理解其几何意义.
2. 理解两个平面向量共线的含义.
3. 了解平面向量的线性运算性质及其几何意义.

课前预习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 向量的数乘运算

1. 向量的数乘的定义

一般地,我们规定实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个________,这种运算叫作____________,记作________,它的长度与方向规定如下:

(1)$|\lambda\boldsymbol{a}|=$____________;

(2)当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向________;

当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向________;

当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=$________,方向________.

2. 向量数乘的运算律

设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为向量,λ,μ 为实数,那么

(1)$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=$________;

(2)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=$________;

(3)$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$________.

特别地,$(-\lambda)\boldsymbol{a}=-(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(-\boldsymbol{a})$,$\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$.

3. 向量的线性运算

(1)向量的____________运算统称为向量的线性运算.

(2)对于任意向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,以及任意实数 λ,μ_1,μ_2,恒有 $\lambda(\mu_1\boldsymbol{a}\pm\mu_2\boldsymbol{b})=$____________.

【诊断分析】1. 判断下列说法的正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向一致. ( )

(2)若 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. ( )

(3)对于任意实数 m 和向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,若 $m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. ( )

2. $\frac{1}{12}[2(2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b})-4(4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})]=$________.

◆ 知识点二 向量共线定理

向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是:________一个实数 λ,使________.

【诊断分析】1. 判断下列说法的正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)若向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线,则存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. ( )

(2)若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线. ( )

2. 向量共线定理中为什么规定 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$?

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　向量的数乘的概念

例 1 (1)(多选题)已知 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$,且 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$,则下列说法中正确的是　　(　　)

A. 当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向一定相反

B. 当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向具有任意性

C. $|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$

D. 当 $\lambda\mu>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\mu\boldsymbol{a}$ 的方向一定相同

(2)已知点 C 在线段 AB 的延长线上,且 $AB:AC=2:3$.

①用 $\overrightarrow{BC}$ 表示 $\overrightarrow{AB}$;②用 $\overrightarrow{CB}$ 表示 $\overrightarrow{AC}$.

◆ 探究点二　向量的线性运算

例 2 (1)化简:

①$4(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})+6(-2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=$________;

②$\frac{2}{5}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})+\frac{2}{15}(2\boldsymbol{a}+13\boldsymbol{b})=$________;

③$\frac{2}{3}\left[(4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{4}(6\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b})\right]=$________.

(2)已知 $3(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{a})-4(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathbf{0}$,求 $\boldsymbol{x}$.

变式 (1)[2025·浙江 A9 协作体高一期中] 已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为两个不共线的向量,$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$,则 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=$________.(用 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 表示)

(2)已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 满足关系式 $3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}$,$-4\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$,则向量 $\boldsymbol{x}=$________,$\boldsymbol{y}=$________.(用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示)

[素养小结]

向量线性运算的方法

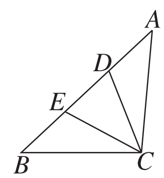
(1)向量的线性运算类似于多项式的代数运算,实数运算中的去括号、移项、合并同类项、提取公因式等变形手段在向量的线性运算中同样适用.

(2)向量也可以通过列方程来解,即把所求向量当作未知数,利用解代数方程的方法求解,同时在运算过程中要多注意观察,恰当运用运算律,简化运算.

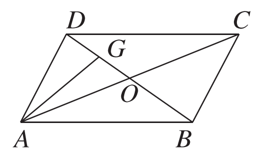
◆ 探究点三　用已知向量表示未知向量

例 3 (1)如图①,在△ABC 中,D,E 为边 AB 上的三等分点,若 $\overrightarrow{CA}=3\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CB}=2\boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}$.

(2)如图②,在▱$ABCD$ 中,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,点 O 是 AC 与 BD 的交点,点 G 是 DO 的中点,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AG}$.



①



②

变式 [2025·济宁高一期中] 在△ABC 中,AD 为 BC 边上的中线,E 为 AD 上靠近 A 的三等分点,则 $\overrightarrow{BE}=$　　(　　)

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B. $-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$　　D. $-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

◆ 探究点四　向量共线定理及其应用

例 4　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是不共线的两个向量.

(1)若 $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，求证：$A,B,D$ 三点共线；

(2)若 $8\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 共线，求实数 k 的值.

变式　(1)已知 $\boldsymbol{e}_1\neq\boldsymbol{0}$，$\lambda\in\mathbf{R}$，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的条件为　　(　　)

A. $\lambda=0$　　B. $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$

C. $\boldsymbol{e}_1/\!/\boldsymbol{e}_2$　　D. $\boldsymbol{e}_1/\!/\boldsymbol{e}_2$ 或 $\lambda=0$

(2)已知 A,B,P 三点共线，O 为直线 AB 外任意一点，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 $x+y=$　　(　　)

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{1}{3}$

[素养小结]

1. 证明或判断三点共线的方法

(1)一般来说，要判断 A,B,C 三点是否共线，只需看是否存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$(或 $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ 等).

(2)利用结论：若 A,B,C 三点共线，O 为直线外一点，则存在实数 x,y，使 $\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$ 且 $x+y=1$.

2. 利用向量共线求参数的方法

解决判断、证明向量共线问题的思路是根据向量共线定理寻求唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$. 而已知向量共线求 λ，常根据向量共线的条件转化为相应向量系数相等求解. 若两向量不共线，则必有向量的系数为零，利用待定系数法建立方程(组)，从而解方程(组)求得 λ 的值.

拓展　在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=2$，$AC=3$，P 在边 BC 上，且 $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$Q$ 是边 AB 上的动点. 若 $\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$，$O$ 是 AP 的中点，求证：C,O,Q 三点共线.

6.2.4　向量的数量积

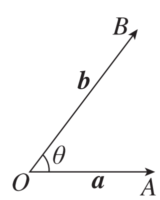
第 1 课时　向量数量积的定义、投影向量

【学习目标】

1. 通过物理中“功”等实例，理解平面向量数量积的概念及其物理意义，会计算平面向量的数量积.
2. 通过几何直观，了解平面向量投影的概念以及投影向量的意义，体会平面向量数量积与投影向量的关系.

课前预习　知识导学　素养初识

◆ 知识点一　向量的夹角



1. 定义：如图，已知两个__________$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，O 是平面上的任意一点，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB=\theta$__________叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的________.

2. 特殊情况：(1)当 $\theta=$________时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向；当 $\theta=$________时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向.

(2)向量垂直：如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是________，我们说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作________.

【诊断分析】1. 判断下列说法的正误.(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1)已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则向量 $2\boldsymbol{a}$ 与 $-3\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$.　　(　　)

(2)在等边三角形 ABC 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°.　　(　　)

2. 向量的夹角的几何意义是什么？向量的夹角的取值范围是什么？

◆ 知识点二 向量的数量积

条件	已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角为 θ
结论	数量________叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(或内积)
记法	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________
规定	零向量与任一向量的数量积为________

【诊断分析】1. 判断下列说法的正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)两个向量的数量积仍然是向量. ( )

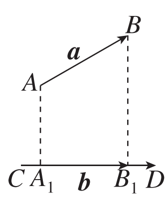
(2)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角. ( )

(3)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. ( )

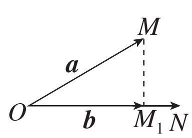
2. 向量的数量积与向量的数乘的区别是什么？

◆ 知识点三 向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量

1. 投影与变换：如图，设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}$，过 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B，分别作 $\overrightarrow{CD}$ 所在直线的垂线，垂足分别为 A_1，B_1，得到 $\overrightarrow{A_1B_1}$，称上述变换为向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$________，$\overrightarrow{A_1B_1}$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的____________.



2. 投影向量的定义：如图，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{b}$，过点 M 作直线 ON 的垂线，垂足为 M_1，则 $\overrightarrow{OM_1}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的________.



3. 计算：设与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量为 $\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为____________.

【诊断分析】判断下列说法的正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)若 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{e}|=1$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角为 $30°$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{e}$ 上的投影向量为 $2\sqrt{3}\boldsymbol{e}$. ( )

(2)向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量与 $\boldsymbol{b}$ 共线，且模为 $|\boldsymbol{a}\cos\theta|$($\theta$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角). ( )

◆ 知识点四 数量积的性质

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量，它们的夹角是 θ，$\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同的单位向量，则

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=$________.

(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$________.

(3)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________.

特别地，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=$________或 $|\boldsymbol{a}|=$________.

(4)$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，当且仅当________时等号成立.

(5)$\cos\theta=$________.

【诊断分析】判断下列说法的正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均有 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$. ( )

(2)若 $|\boldsymbol{a}|=2$，则 $\boldsymbol{a}^2=4$. ( )

(3)设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则"$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$"的充要条件是"$\cos\theta>0$". ( )

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 向量的夹角

例 1 已知 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角是多少？$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角又是多少？

◆ 探究点二　平面向量的数量积

例 2　已知$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=5$，分别求下列条件下 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积.

(1)$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；

(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；

(3)$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $30°$.

变式　(1)已知$|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{3}{2}$，则$|\boldsymbol{b}|=$________.

(2)[2025·同济大学一附中高一期末] 已知$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{3\pi}{4}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________.

[素养小结]

求平面向量数量积的步骤：(1)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ，$\theta\in[0,\pi]$；(2)分别求$|\boldsymbol{a}|$和$|\boldsymbol{b}|$；(3)求数量积，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$，要特别注意书写时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间用实心圆点“·”连接，不能用“×”连接，也不能省去.

◆ 探究点三　平面向量的投影向量

例 3　已知$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=1$，向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$，求：

(1)向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量；

(2)向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量.

变式 1　[教材 P20 练习 T3] 已知$|\boldsymbol{a}|=6$，$\boldsymbol{e}$ 为单位向量，当向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{e}$ 的夹角 θ 分别等于 $45°$，$90°$，$135°$ 时，求向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{e}$ 上的投影向量.

变式 2　(1)[2025·福州高一期中] 已知$|\boldsymbol{a}|=3$，向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为$-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________.

(2)已知 A，B 两点在圆 C 上运动，若 $AB=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ________.

[素养小结]

求投影向量的方法

(1)向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的计算公式为$|\boldsymbol{a}|\cos\theta\,\boldsymbol{e}$，其中 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，向量 $\boldsymbol{e}$ 为与向量 $\boldsymbol{b}$ 同方向的单位向量，即 $\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

(2)向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$；向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

◆ 探究点四　平面向量数量积的基本性质

例 4　给出以下结论：①$\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$；②若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；③$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$；④已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是三个非零向量，若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|$；⑤$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；⑥若非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角. 其中正确结论的个数为　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

变式 (多选题)已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个非零向量,则下列说法中正确的是 ( )

A. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\pm|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$

B. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向共线,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$

C. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

D. 若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|$

[素养小结]

对于这类概念、性质、运算律的问题的解答,关键是要深刻理解相关知识,特别是那些易与实数运算相混淆的运算律,如消去律、乘法结合律等,当然还有向量的数量积中有关角的概念以及数量积的性质等.

第 2 课时　向量数量积的运算律

【学习目标】

理解平面向量数量积的运算律,会用数量积判定两个平面向量的垂直关系.

课前预习

知识导学　素养初识

◆ 知识点一　数量积的运算律

对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 和实数 λ,有

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________(交换律).

(2)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=$________$=$________(结合律).

(3)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$__________(分配律).

【诊断分析】判断下列说法的正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$. ( )

(2)$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$. ( )

(3)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$. ( )

◆ 知识点二　数量积运算的常用公式

多项式乘法	向量数量积
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=$________
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=$________
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$________
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=$________

课中探究

考点探究　素养小结

◆ 探究点一　向量数量积的运算律

例 1 (多选题)设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是不共线的非零向量,则下列结论正确的是 ( )

A. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

B. $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$ 不与 $\boldsymbol{c}$ 垂直

C. $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

D. $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=9|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{b}|^2$

变式 (多选题)将平面向量的数量积运算与实数的乘法运算相类比,下列结论正确的是 ( )

A. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

B. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$

C. $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

D. 由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ $(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$,可得 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

◆ 探究点二　求向量的数量积

例 2 (1)[教材 P21 例 12] 已知 $|\boldsymbol{a}|=6$,$|\boldsymbol{b}|=4$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$,求 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

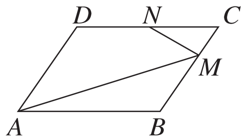
(2)在 $\triangle ABC$ 中,M 是 BC 的中点,$AM=3$,$BC=10$,求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值.

变式 (1)已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$,$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$ ( )

A. $\dfrac{17}{2}$　　B. $\dfrac{15}{2}$

C. $-\dfrac{17}{2}$　　D. $-\dfrac{15}{2}$

(2)如图,四边形 $ABCD$ 为平行四边形,$AB=4$,$AD=3$,点 M,N 满足 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC}$,$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{NC}$,求 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}$ 的值.



[素养小结]

(1)求两个向量的数量积,应首先确定两个向量的模及夹角,其中准确求出两个向量的夹角是求数量积的关键.

(2)根据数量积的运算律,向量的加、减与数量积的混合运算类似于多项式的乘法运算.

◆ 探究点三　向量模、夹角的计算问题

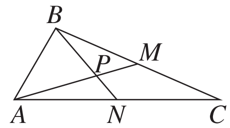
例 3 [2025·嘉兴实验高级中学高一期中] 已知 $|\boldsymbol{a}|=4$,$|\boldsymbol{b}|=2$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$,求:

(1)$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

(2)$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角.

变式 (1)[2025·东莞中学高一月考] 如果向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=4$,$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=81$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是________.

(2)如图,在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB=2$,$AC=5$,$\angle BAC=60°$,BC,AC 边上的中线 AM,BN 相交于点 P,求 $|\overrightarrow{AP}|$.



[素养小结]

求平面向量的模和夹角时要注意数量积运算律的正确运用,在解决与图形有关的模与夹角问题时要注意选择合适的向量表示及公式的正确计算.

◆ 探究点四　两个非零向量的垂直问题

例 4 [教材 P21 例 13] 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=4$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线.当 k 为何值时,向量 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 互相垂直?

变式 若向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$,$|\boldsymbol{b}|=2$,且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为　　(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

[素养小结]

解决与垂直有关的问题时要利用 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$($\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 均为非零向量).

拓展 已知 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是平面内的两个单位向量,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$,则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值是________.

6.3 平面向量基本定理及坐标表示

6.3.1 平面向量基本定理

【学习目标】

了解平面向量基本定理及其意义,会用平面向量基本定理解决简单数学问题.

课前预习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 平面向量基本定理

1. 平面向量基本定理:如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个________向量,那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$,有且只有一对实数 λ_1,λ_2,使 $\boldsymbol{a}=$__________.

2. 基底:若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$_________,我们把 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 叫作表示这一平面内所有向量的一个基底.

【诊断分析】1. 判断下列说法的正误.(正确的打"√",错误的打"×")

(1)平面内任意两个向量都可以构成表示该平面内所有向量的一个基底. ( )

(2)平面向量基本定理中基底的选取是唯一的. ( )

(3)若 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$,则 $\lambda_1=\lambda_2=0$. ( )

2. 已知平面内的一个基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$,平面内任何一个向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以表示成 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 的形式,这种表示形式是唯一的吗?

◆ 知识点二 平面向量基本定理的应用

1. 平面向量基本定理唯一性的应用

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是同一平面内的两个不共线向量,若 $x_1\boldsymbol{a}+y_1\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{a}+y_2\boldsymbol{b}$,则 $\begin{cases}x_1=x_2,\\y_1=y_2.\end{cases}$

2. 重要结论

设 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 是平面内的一个基底,若 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$:

①当 $\lambda_2=0$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 共线;

②当 $\lambda_1=0$ 时,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 共线;

③当 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 时,$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 对基底概念的理解

例 1 (1)(多选题)下列说法中正确的是 ( )

A. 一个平面内只有一对不共线向量可构成表示该平面内所有向量的基底

B. 一个平面内有无数对不共线向量可构成表示该平面内所有向量的基底

C. 零向量不可作为基底中的向量

D. 一对不共线的单位向量可构成表示该平面内所有向量的一个基底

(2)[2025·山东青岛高一阶段练] 若 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ 是平面内的一个基底,则下列四组向量中可以作为平面内所有向量的一个基底的是 ( )

A. $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2,2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1$

B. $2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2,3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$

C. $2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_1,6\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2$

D. $\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$

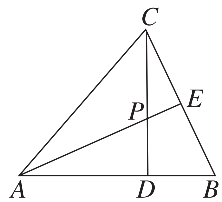
变式 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,试判断 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 能否构成一个基底.

[素养小结]

判断两个向量是否能构成一个基底,主要看两向量是否非零且不共线.此外,一个平面的基底一旦确定,那么该平面内任意一个向量都可以由这个基底唯一线性表示出来.

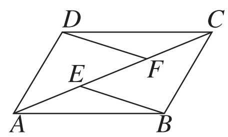
◆ 探究点二　用基底表示平面内的向量

例 2 如图，在$\triangle ABC$中，E是边BC的中点，点D在边AB上，且满足$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，$AE$与$CD$交于点$P$. 试用$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$表示$\overrightarrow{CD}$和$\overrightarrow{CP}$.



变式 (1)已知$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$是不共线向量，且$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{e}_1+12\boldsymbol{e}_2$，若$\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$为平面内的一个基底，则$\boldsymbol{a}=$________(用$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$线性表示).

(2)如图，在平行四边形$ABCD$中，E，F是对角线AC上的两个三等分点，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{DF}=$________，$\overrightarrow{BE}=$________.(用$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$表示)



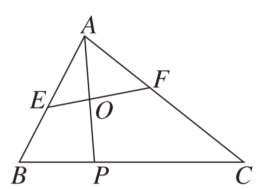
[素养小结]

用两个不共线的向量构成的基底表示其他向量的基本方法有两种：一种是运用向量的线性运算法则对待求向量不断进行转化，直至能用基底表示；另一种是通过列向量方程或方程组的形式，利用基底表示向量的唯一性求解.

拓展 如图，在$\triangle ABC$中，点P满足$\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{BP}$，$O$是线段$AP$的中点，过点$O$的直线与边$AB$，$AC$分别交于点$E$，$F$.

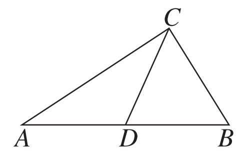
(1)若$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求$x$和$y$的值；

(2)若$\overrightarrow{EB}=\lambda\overrightarrow{AE}(\lambda>0)$，$\overrightarrow{FC}=\mu\overrightarrow{AF}(\mu>0)$，求$\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{2}{\mu}$的最小值.



◆ 探究点三　平面向量基本定理的应用

例 3 [教材 P26 例 2] 如图，CD是$\triangle ABC$的中线，$CD=\dfrac{1}{2}AB$，用向量方法证明$\triangle ABC$是直角三角形.



变式 如图，在平行四边形$ABCD$中，点E是AB的中点，点F，G分别是AD，BC的三等分点$\left(AF=\dfrac{1}{3}AD，BG=\dfrac{1}{3}BC\right)$. 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$.

(1)用$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$表示$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{EG}$.

(2)若$|\boldsymbol{b}|=\dfrac{3}{2}|\boldsymbol{a}|$，则$EF$，$EG$有什么位置关系？用向量方法证明你的结论.